2.3. Электромагнитные колебания

Справочные сведения

Задачи настоящего раздела посвящены собственным электромагнитным колебаниям

Действующие значения тока и напряжения определяются из выражения

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt, U^2 = \frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt,$$

где T — период изменения тока,

i и u мгновенные значения тока и напряжения.

Период T электромагнитных колебаний в контуре, состоящем из емкости C, индуктивности L и сопротивления R, определяются формулой

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}.$$

Если сопротивление R контура настолько мало, что

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 << \frac{1}{LC}$$

то период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Если сопротивление контура R не равно нулю, то колебания будут затухающими. При этом разность потенциалов на обкладках конденсатора меняется со временем по закону,

$$U = U_0 e^{-\delta t} \cos\omega t\ ,$$

если время отсчитывать от момента, соответствующего наибольшей разности потенциалов на обкладках конденсатора. Здесь $\delta = R/2L$ – коэффициент затухания. Величина $\chi = \delta T$ называется логарифмическим декрементом затухания. Если $\delta = 0$, то колебания будут незатухающими, и тогда можно записать

$$U = U_0 \cos\omega t.$$

Если время отсчитывать от момента, когда разность потенциалов на обкладках конденсатора равна нулю, то будет справедливым соотношение

$$U = U_0 \sin\omega t.$$

Действующие значения тока и напряжения для синусоидального тока соответственно равны:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, U = \frac{U_m}{\sqrt{2}},$$

где 1т, Uт - амплитуды тока и напряжения.

Закон Ома для синусоидального тока:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}}$$

(здесь $\dot{I}$, $\dot{U}$, $\dot{Z}$ — комплексные амплитуды тока, напряжения, сопротивления).

При параллельном соединении элементов цепи складываются проводимости, при последовательном соединении - импедансы. Сопротивление цепи Z определяется модулем импеданса (комплексного сопротивления).

Если цепь содержит сопротивление *R*, емкость *C* и индуктивность *L*, соединенные последовательно, то

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

При этом сдвиг фаз между напряжением и током определяется формулой

$$tg\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Тангенс угла сдвига фаз между током и напряжением равен отношению мнимой части комплексного сопротивления к действительной.

Активная мощность электрической цепи для синусоидального тока

$$P = IU\cos\varphi$$

где I, U - действующие значения тока и напряжения,

φ - сдвиг фаз между током и напряжением.

Примеры решения задач

*Задача 1.*Максимальное напряжение в колебательном контуре, состоящей из катушки индуктивностью $L=5\cdot10^3$Гн и конденсатора емкостью $C=18\cdot10^3$ см, равно U_0=120 В. Сопротивление ничтожно мало.

Определить максимальное значение магнитного потока, если число витков катушки Z=30.

Решение

Магнитный поток связан с током соотношением

$$\Phi = \frac{L_i}{Z}$$

(Здесь Ф – не поток сцепления, а поток, создаваемый катушкой, поэтому в знаменателе стоит число витков Z.) Максимальное значение потока с учетом, что циклическая частота колебаний

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

может быть рассчитана по формуле

$$\Phi_0 = \frac{U_0\sqrt{LC}}{Z} = 12{,}5 \cdot 10^{-7}\ Вб$$

Задача 2. Определить длину волн, излучаемых колебательным контуром, состоящим из катушки с индуктивностью L=1,2 мГн и конденсатора с емкостью $C=3\cdot10^{-2}$мкФ. Сопротивление контура ничтожно мало.

Решение

Длина волны λ, излучаемая контуром, однозначно определяется его частотой ν:

$$\lambda = \frac{c}{\nu}$$

где $c=3\cdot10^{8}$ м/сек. – скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. Частота колебаний, возникающих в контуре,

$$\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Решая совместно два уравнения, получаем:

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}$$

Подставив значения c, L и C в системе СИ, найдем:

$\lambda=11.3\cdot 10^{-3}$ м.

Подсказка 1 Гн = 10^{9} см. 1 Ф = $9\cdot10^{11}$ см.

Задача3. Контур состоит из катушки индуктивностью L = $3 \cdot 10^4$ см и омическим сопротивлением R = 1 Ом и из конденсатора емкостью C = $2 \cdot 10^3$ см. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие колебания, при которых максимальное напряжение на конденсаторе U_0 = 0.5 В ?

Решение

При отсутствии омического сопротивления в контуре возникают незатухающие колебания – полная энергия остается неизменной, происходит лишь непрерывный переход энергии электрической, сосредоточенной в конденсаторе, в энергию магнитную, сосредоточенную в катушке с индуктивностью, и обратно. На омическом сопротивлении происходит выделение джоулевой теплоты, и полная энергия будет непрерывно уменьшаться. Чтобы при наличии сопротивления катушки колебания были незатухающими, контур должен непрерывно получать энергию извне, причем потребляемая средняя мощность должна равняться

$$P = \frac{W_T}{T} \qquad (3.3.1)$$

где W_T - потеря энергии за время, равное периоду колебаний T.

Найдем энергию, теряемую в виде джоулевой теплоты на сопротивлении за время одного периода:

$$W_T = \int_0^T i^2 R dt \qquad (3.3.2)$$

Так как энергия контура непрерывно пополняется, колебания будут происходить по гармоническому закону:

$$i = i_0 \cos(\omega t + a), \qquad (3.3.3)$$

где i_0 - амплитудное значение силы тока, a - начальная фаза колебаний.

Подставляя формулу (3.3.3) в выражение (3.3.2), находим

$$W_T = i_0^2 R \int_0^T \cos^2(\omega t + \alpha) dt = \frac{1}{2} i_0^2 RT \qquad (3.3.4)$$

При интегрировании подынтегральное выражение следует заменить соотношением:

$$\cos 2(\omega t + a) = ½ [1 + \cos 2(\omega t + a)].$$

Интеграл от первого слагаемого дает T, интеграл от второго слагаемого обращается в нуль независимо от значения a.

Как известно,

$$i_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Следовательно, искомая мощность

$$P = \frac{U_0^2 CR}{2L} = 10^{-5}\, Bm$$

Задача 4. Батарея, состоящая из двух конденсаторов емкостью по 2 мкФ каждый, разряжается через катушку (L = 1 мГн, R = 5 Ом). Возникнут ли колебания, если конденсаторы соединены: 1) параллельно, 2) последовательно?

Решение

Если сопротивление колебательного контура не равно нулю, то возникающие в нем колебания являются затухающими, происходящими по закону

$$U=U_0\, e^{-\beta t} \cos(\omega t + a) \tag{3.3.5}$$

Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \tag{3.3.6}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ - собственная частота контура, $\beta = \frac{R}{2L}$ - коэффициент затухания.

Из выражения (3.3.6) видно, что колебания могут возникнуть тогда, когда подкоренное выражение больше нуля. В противном случае разряд конденсатора будет носить апериодический характер.

Заменим в формуле (3.3.6) ω_0 и β их значениями. Тогда получим, что колебания возникнут при условии:

$$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2} \tag{3.3.7}$$

Согласно условию задачи емкость в первом случае C_1=2C=4мкф,

Во втором случае - $C_2 = {}^{C}\!/_{2} = 1 мкФ$

Подставим числовые значения величин в выражение (3.3.7) и произведем вычисления:

1) $\frac{1}{LC_1} = 2{,}5 \cdot 10^8 c^{-2}$; $\quad \frac{R^2}{4L^2} = 6{,}2 \cdot 10^8 c^{-2}$

следовательно, $\frac{1}{LC_1}$ меньше $\frac{R^2}{4L^2}$; возникнет апериодический разряд.

2) $\frac{1}{LC_2} = 10^9 c^{-2}$; следовательно, $\frac{1}{LC_2}$ больше $\frac{R^2}{4L^2}$; возникнут затухающие колебания.

Задача 5. Переменный ток, выпрямляемый прибором, пропускающим ток только одну половину периода проходит в течение 10 мин по раствору медного купороса. На электроде выделяется 200 мг меди. Какова амплитуда тока?

Решение

Количество вещества, выделенное при электролизе, равно

$$m = \frac{1}{F}\frac{A}{n}q. \tag{3.3.8}$$

Мгновенное значение переменного тока

i=Imsin ωt .

За период через электролит проходит количество электричества

$$q_1 = \int_0^{T/2} I_m \sin\omega t dt = \frac{I_m}{\omega}\left(-\cos\omega t\right)\Big|_0^{T/2} = \frac{I_m T}{\pi}$$

За время t через электролит пройдет заряд, равный

$$q = \frac{q_1}{T} = \frac{I_m}{\pi}t. \tag{3.3.9}$$

Решая совместно уравнения (3.3.8) и (3.3.9), получаем:

$$I_m = \frac{mnF\pi}{At}$$

Производим расчет:

(значения F = 9,65·107 Кл/(кг·экВ); A = 63; n = 2 берем из таблиц)

Im = 3,2 A.

Задача 6 В цепь переменного тока (f = 50 Гц) с действующим напряжением 127 В включены параллельно конденсатор емкостью C = 24 мкФ и дроссель индуктивностью L = 0,6 Гн и активным сопротивлением R = 100 Ом. Определите действующее значение подводимого к участку тока.

Решение

Для нахождения различных величин в цепях переменного тока удо бно пользоваться символическим методом, состоящим в том, что гармонически колеблющиеся физические величины представляют в виде комплексных величин. Этот метод позволяет решение задачи в любой цепи переменного тока получить из соответствующего решения для постоянного тока, если ток, напряжение и ЭДС заменить их комплексными амплитудами, а сопротивление участков — их комплексными сопротивлениями.

Величина подводимого тока зависит от напряжения и полного сопротивления цепи Z:

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}};\ I = \frac{U}{Z}. \qquad (3.3.10)$$

Цепь состоит из двух параллельно соединенных участков с комплексными сопротивлениями:

$$\dot{Z}_1 = R + j\omega L; \quad \dot{Z}_1 = (100 + j \cdot 118{,}4)\ \text{Ом}$$

$$\dot{Z}_2 = \left(-j\frac{1}{\omega C}\right);\ \dot{Z}_2 = -j \cdot 132{,}5$$

Полное комплексное сопротивление цепи (импеданс цепи):

$$\dot{Z} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2};\ \dot{Z} = 10^2 (1{,}32 - j \cdot 2{,}07)$$

Модуль импеданса определяет полное сопротивление цепи:

$$Z = 246\ \text{Ом}.$$

Действующий ток, подводимый к цепи, находим из уравнения (3.3.10):

$$I = 0{,}515\ \text{А}.$$

Задача 7. В цепь переменного тока с действующим напряжением U = 220В (f =50 Гц) включены последовательно конденсатор емкостью C=18 мкФ, активное сопротивление R = 10 Ом и дроссель индуктивностью L= 0,6 Гн, на котором напряжение опережает ток на угол a = 60°. Определите: а) мощность, выделяемую на каждом из элементов и во всей цепи: б) коэффициент мощности для всей цепи.

Решение

Мощность, поглощаемая каким-либо участком цепи, определяется квадратом действующего значения тока и активным сопротивлением участка:

$$P = I^2 R_{акт}$$

Цепь состоит из последовательно соединенных участков конденсатора С (комплексное сопротивление -j $\frac{1}{\omega C}$), активного сопротивления R, дросселя (комплексное сопротивление R' + jωL).

При последовательном соединении сопротивления складываются, поэтому комплексное сопротивление цепи (импеданс цепи) равно:

$$\dot{Z} = (R + R') + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right).$$

Для определения активного сопротивления дросселя воспользуемся тем, что тангенс угла сдвига фаз а между током и напряжением определяется отношением мнимой части комплексного сопротивления к действительной. Отсюда активное сопротивление дросселя (действительная часть комплексного сопротивления) равно:

$$R' = \frac{\omega L}{tga}$$

Модуль импеданса определяет полное сопротивление цепи:

$$Z = \sqrt{(R + R')^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Действующее значение тока в цепи

$$I = \frac{U}{z}$$

Мощность выделяется только на активном сопротивлении. Конденсатор не имеет активного сопротивления, мощность на нем не выделяется:

$$P_1 = 0.$$

Мощность, выделяемая в сопротивлении R:

$$P_2\text{=I2R.}$$

Мощность, выделяемая в дросселе:

$$P_3 = I^2R' = I^2.\frac{\omega L}{tg\alpha}.$$

Мощность, выделяемая в цепи:

$$P = P_2 + P_3$$

Коэффициент мощности:

$$\cos\varphi = \frac{P}{IU}$$

При подстановке данных условия задачи, получим.

R′=10.9 Ом; I=9,3 А; P_2=846 Вт; P_3=925 Вт; P=1771 Вт; cos α=0.87.

Индивидуальные задания

2.3.1. Колебательный контур содержит соленоид (длина $l = 5\,см$, площадь поперечного сечения $S_1 = 1{,}5\,см^2$, число витков $N = 500$) и плоский воздушный конденсатор (расстояние между пластинами $d = 1{,}5\,мм$, площадь пластин $S_1 = 100\,см^2$). Определить частоту ω_0 собственных колебаний контура.

Ответ: $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}; \quad \omega_0 = 42{,}5 \cdot 10^5\, c^{-1}$.

2.3.2. Энергия свободных незатухающих колебаний, происходящих в колебательном контуре, составляет 0,2 мДж. При медленном раздвижении пластин конденсатора частота колебаний увеличилась в $n = 2$ раза. Определить работу, совершенную против сил электрического поля. Ответ: *0,15 Дж*

2.3.3. Найти отношение энергии $W_м/W_{эл}$ магнитного поля колебательного контура к энергии его электрического поля для момента T/8. Ответ: $\dfrac{W_м}{W_{эл}} = \dfrac{\sin^2 \omega t}{\cos^2 \omega t}; \quad \dfrac{W_м}{W_{эл}} = 1$.

2.3.4 Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 10\,мГн$, конденсатора емкостью $C = 0{,}1\,мкФ$ и резистора сопротивлением $R = 20\,Ом$. Определить, через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в e раз.

Ответ: $N = \dfrac{L}{\pi R}\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}; \quad N = 5$.

2.3.5.Какую энергию необходимо подвести к колебательному контуру с логарифмическом декрементом затухания 0,03, чтобы поддерживать в немнезатухающие колебания в течение часа, если контур состоит из конденсатора емкостью C = 0,05мкФ и катушки с L = 2мГн, а максимальный ток в катушке I_m=5мА.

Ответ: $W = \dfrac{\lambda I^2 t}{2\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{L}{C}}; \quad W = 0{,}17 \quad Дж$

2.3.6 В цепь колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 40\,Ом$, катушку индуктивностью $L = 0{,}36\,Гн$ и конденсатор емкостью $C = 28\,мкФ$, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением $U_m = 180\,В$ и частотой $\omega = 314\, {рад}/{с}$. Определить: 1)амплитудное значение силы тока в цепи; 2)сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

Ответ: I_m=4,5 А; φ=-1°

2.3.7 Последовательно соединенные резистор с сопротивлением $R = 110\,Ом$ и конденсатор подключены к внешнему переменному напряжению с амплитудным значением $U_m = 110\,В$. Оказалось, что амплитуда установившегося тока в цепи $I_m = 0{,}5\,А$. Определить разность фаз между током и внешним напряжением.

Ответ: φ=-60, ток опережает напряжение.

2.3.8 В цепь переменного тока частотой $\nu = 50\,Гц$ включена катушка длиной $l = 20\,см$ и диаметром $d = 5\,см$, содержащая $N = 500$ витков медного провода площадью поперечного сечения $S_1 = 0{,}6\,мм^2$. Определить, какая доля полного сопротивления катушки приходится на реактивное сопротивление. Удельное сопротивление меди $\rho = 17\,нОм \cdot м$. Ответ: $\dfrac{X}{Z} = \dfrac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}}$; $\dfrac{X}{Z} = 0{,}4$.

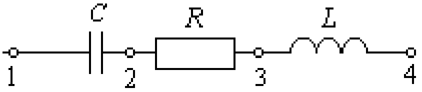
2.3.9. В цепь переменного тока частотой $\nu = 50\,Гц$ включена катушка длиной $l = 30\,см$ и площадью поперечного сечения $S_1 = 10\,см^2$, содержащая $N = 1000$ витков. Определить активное сопротивление катушки, если известно, что сдвиг фаз между током и напряжением $\varphi = 30^0$.

Ответ: $R = \dfrac{2\pi\nu\mu_0 N^2 S}{l tg\varphi}$; $R = 2{,}3Ом$.

2.3.10 Цепь переменного тока состоит из последовательно соединенных катушки, конденсатора и резистора. Амплитудное значение напряжения между точками 1 и 2 схемы $U_{12} = 173\,В$, а амплитудное значение напряжения на резисторе $U_R = 100\,В$. Определить сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

Ответ: $tg\varphi = \dfrac{U_{LC}}{U_R}$; $\varphi = 60°$.

2.3.11 В цепь переменного тока частотой $\nu = 50\,Гц$ последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100\,Ом$ и конденсатор емкостью $C = 22\,мкФ$. Определить, какая доля напряжения, приложенного к этой цепи, приходится на падение напряжения на конденсаторе. Ответ: $\frac{U_C}{U} = 0{,}82$



2.3.12 В цепь переменного тока с частотой $\nu = 50\,Гц$ и действующим значением напряжения $U = 300\,В$ последовательно включены конденсатор, резистор сопротивлением $R = 50\,Ом$ и катушка индуктивностью $L = 0{,}1\,Гн$. При подключении вольтметра в точках 1 и 3 его показания U_{13}, а при подключении в точках 2 и 4 - U_{24}, причем $\frac{U_{13}}{U_{24}} = \frac{1}{2}$. Определить емкость конденсатора.

Ответ: $C = \frac{1}{\omega\sqrt{R^2 + 4(\omega L)^2}}; \quad C = 3мкФ$.

2.3.13. Колебательныйконтур состоит из конденсатора емкостью *C* =0,2мкФ и катушки с индуктивностью *L*=5,07 мГн. При каком логарифмическом декременте затухания разность потенциалов на обкладках конденсатора за время *t* =1мс уменьшится в три раза? Каково при этом сопротивление *R* контура? Ответ: $\chi = \frac{T}{t}\ln\frac{U_0}{U_1}; \quad \chi = 0{,}22$.

2.3.14 В цепи переменного тока с частотой $\nu = 50\,Гц$ вольтметр показывает нуль при значении $C = 20\,мкФ$. Определить индуктивность катушки. Ответ: *L*=0,5 Гн.

2.3.15 В сеть переменного тока с действующим значением напряжения 120 В последовательно включены проводник с активным сопротивлением 10 Ом и катушка индуктивностью 0,1 Гн. Определить частоту тока, если амплитудное значение силы тока в цепи равно 5 А.

Ответ: $\nu = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{2U^2}{I_m^2} - R^2}; \quad \nu = 51.6 \quad Гц$.